

f و F دالتان معرفتان على مجال D من \mathbb{R} ، نسمي F دالة أصلية للدالة f على المجال D إذا وفقط إذا كان $F'(x) = f(x)$

ملاحظة

إذا كانت F دالة أصلية لـ f فإن كل دالة من الشكل $F(x) + c$ (حيث c عدد حقيقي) هي دالة أصلية لـ f .

مثال 01

f و g الدالتان المعرفتان على $]0; +\infty[$ كما يلي $f(x) = 2x + 3 + \ln x$ و $g(x) = x^2 + 2x + x \ln x$ برهن أن الدالة g دالة أصلية للدالة f .

تطبيق 01

في كل مما يأتي برهن أن الدالة g دالة أصلية للدالة f

D	$g(x)$	$f(x)$
\mathbb{R}	$(2x+3)e^x$	$(2x+5)e^x$
\mathbb{R}	$(x^2+x+1)e^x$	$(x^2+3x+2)e^x$
\mathbb{R}	x^2e^{-x}	$(-x^2+2x)e^{-x}$
$]0; +\infty[$	$x^2+3x-2\ln x+2$	$2x+3-\frac{2}{x}$
$]0; +\infty[$	$x \ln x - x$	$\ln x$
$]0; +\infty[$	$\frac{1}{2}(\ln x)^2$	$\frac{\ln x}{x}$

مثال 02

f و g الدالتان المعرفتان على \mathbb{R} كما يلي $f(x) = (2x-1)e^x$ و $g(x) = (ax+b)e^x$ عين العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة g أصلية للدالة f

تطبيق 02

في كل مما يأتي عين α و β حتى تكون F دالة أصلية للدالة f .

$f(x)$	$(2x+1)e^x$	$(x-1)e^{-x}$	xe^{2x}
$F(x)$	$(\alpha x + \beta)e^x$	$(\alpha x + \beta)e^{-x}$	$(\alpha x + \beta)e^{2x}$

في كل مما يأتي عين a ، b و c حتى تكون F دالة أصلية للدالة f .

$f(x)$	$(x^2+x-1)e^x$	x^2e^{-2x}	$(x^2+1)e^{-x}$
$F(x)$	$(ax^2+bx+c)e^x$	$(ax^2+bx+c)e^{-2x}$	$(ax^2+bx+c)e^{-x}$

مثال 03 في كل مما يلي أحسب $f'(x) - f(x)$ ثم استنتج F دالة أصلية للدالة f .

$$(1) \quad f(x) = (2x-1)e^x \quad (2) \quad f(x) = (-x+1)e^x$$

$$(3) \quad f(x) = xe^x \quad (4) \quad f(x) = (3x-5)e^x$$

تطبيق 03

في كل مما يلي أحسب $f''(x) - 2f'(x) + f(x)$ ثم استنتج F دالة أصلية للدالة f .

$$(1) \quad f(x) = (x^2-x+1)e^x$$

$$(2) \quad f(x) = (3x^2-2x)e^x$$

تطبيق 04

في كل مما يلي أحسب $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x)$ ثم استنتج F دالة أصلية للدالة f .

$$(1) \quad f(x) = (x^2+x)e^{2x}$$

$$(2) \quad f(x) = (3x^2-x+1)e^{2x}$$

تطبيق 05

في كل مما يأتي عين a ، b و c ثم عين F دالة أصلية للدالة f على المجال D .

$$(1) \quad f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1} \quad \text{و} \quad D =]-1; +\infty[$$

$$(2) \quad f(x) = \frac{x^2-x+3}{x} = ax + b + \frac{c}{x} \quad \text{و} \quad D =]0; +\infty[$$

تطبيق 06

في كل مما يأتي عين a و b ثم عين F دالة أصلية للدالة f على المجال D

$$(1) \quad D = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{3e^x-3}{e^x+1} = a + \frac{be^x}{e^x+1}$$

$$(2) \quad D = \mathbb{R}^* \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{-e^x+2}{e^x-1} = a + \frac{be^x}{e^x-1}$$

الحساب التكاملي

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال $[a; b]$

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{لدينا}$$

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv' \quad \text{التكامل بالتجزئة :}$$

تطبيقات : احسب ما يلي

$$\int_0^1 \ln(x+1) dx, \int_1^e \ln x dx, \int_0^1 (x+1)e^x dx, \int_0^1 xe^x dx$$

تطبيقات عامة : احسب ما يلي :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx, \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx, \int_1^2 \left(e^x - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$\int_0^3 (-x^2+2x)e^{-x} dx, \int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+3} dx$$

