

النهايات**(I) المستقيمات المقاربة الموازية لحاملي محوري الإحداثيات**

معادلة المقارب	النهاية	معادلة المقارب	النهاية
$x = a$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$	$y = b$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$
	$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$		$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$
	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$		$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
	$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$		$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$

1) في كل مما يأتي أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا

$$(1) f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \quad (2) f(x) = \frac{x+2}{3-x}$$

$$(3) f(x) = \frac{-3x^2-x}{x^2+1} \quad (4) f(x) = \frac{1-x}{x^2+2x}$$

2) في كل مما يأتي أحسب $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا

$$(1) f(x) = \frac{2x^2+1}{x-1} \text{ و } a=1 \quad (2) f(x) = \frac{x+2}{3-x} \text{ و } a=3$$

$$(3) f(x) = \frac{-3x+2}{(2-x)^2} \text{ و } a=2 \quad (4) f(x) = \frac{2x-3}{x} \text{ و } a=0$$

$$(5) f(x) = \frac{x+1}{x^2-4} \text{ و } a=\pm 2$$

(II) المستقيم المقارب المائل

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ فإن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلة له: $y = ax + b$ بجوار $+\infty$

تطبيق: استنتج معادلة المستقيم المقارب في الحالات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x + 3] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (3x-1)] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + (-2x+1)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (3x+2)] = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 3x] = 1$$

ملاحظة: إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax+b)] = c$ فإن معادلة المستقيم المقارب المائل هي: $y = ax + b + c$ بجوار $+\infty$

تطبيقات:

في كل مما يأتي بين أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب لـ (C_f)

$$(\Delta): y = -2x + 3, \quad f(x) = -2x + 3 + \frac{x}{x^2-1}$$

$$(\Delta): y = 2x + 1, \quad f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x-1}$$

$$(\Delta): y = x, \quad f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^2 + 2}$$

$$(\Delta): y = -x + 2, \quad f(x) = \frac{-x^2 + x + 1}{x+1}$$

ملاحظة:

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ و $f(x) = ax + b + g(x)$ فإن المستقيم ذا المعادلة: $y = ax + b$ مقارب بجوار $+\infty$

تطبيقات:

1) في كل مما يأتي اوجد معادلة (Δ) المستقيم المقارب لـ (C_f) مع التعليل، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

$$(1) f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x+1} \quad (2) f(x) = -2x + 3 + \frac{x}{x^2-1}$$

$$(3) f(x) = 1 + \frac{1}{x+2} \quad (4) f(x) = 3x + 1 + \frac{-x+1}{x^2+2}$$

$$(5) f(x) = x + \frac{x+1}{x^2+1} \quad (6) f(x) = -x + 1 + \frac{4}{2-x}$$

2) في كل مما يأتي عين الأعداد الحقيقية a, c ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب إعطاء معادلة له

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{x-3} = ax + b + \frac{c}{x-3}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 16}{x-1} = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x-2} = ax + b + \frac{c}{x-2}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2-x} = ax + b + \frac{c}{2-x}$$

التمرين 01

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x}{x^2 - 3x - 4} : D = \mathbb{R} - \{-1; 4\}$$

1- أوجد الأعداد الحقيقية a, b, c حيث من أجل كل x من D

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-4}$$

2- ادرس نهايات الدالة f عند حدود مجالات مجموعة التعريف

التمرين 02

$$f(x) = 3x + \frac{2x+1}{x-2} : \mathbb{R} - \{2\}$$

$$1- \text{احسب } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 3x] \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$$

2- فسر النتائج هندسا (استنتج وجود مقارب مائل لـ (C_f))

التمرين 03

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 3}$$



(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

1- أ- عين الأعداد الحقيقية $a; b; c$ حيث :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3} : \mathbb{R} - \{3\} \text{ من أجل كل } x$$

ب- احسب نهايات للدالة f عند حدود مجموعة التعريف ، ثم فسر النتائج هندسيا .

2- بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 5$ مقارب مائل لـ (C_f)

- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

3- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

4- أحسب $f(6-x) + f(x)$ ، ماذا تستنتج ؟ .

5- ارسم (Δ) ، (C_f) .

6- ناقش بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة

$$f(x) = m$$

التمرين 04

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 3}{(x-1)^2}$$

و (C) تمثيلها البياني

1) أ- احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف .

ب- استنتج المستقيمات المقاربة للمنحني (C) .

2) بين أنه توجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c حيث من أجل

$$f(x) = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} : x \neq 1$$

3) بين أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلاً يطلب تعيين معادلة له .

4) ليكن d المستقيم الذي معادلته $y = x + 1$

- عين نقط تقاطع المنحني (C) و المستقيم d .

التمرين 05

تمرين 33 ص 135

احسب نهاية f عند x_0 في كل حالة من الحالات التالية :

$$x_0 = 0 ; f(x) = \frac{x^2 - x}{3x^2 - x} \quad (1)$$

$$x_0 = 2 ; f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x + 2} \quad (2)$$

$$x_0 = 1 ; f(x) = \frac{(x-1)(2x-3)}{x^2 - 1} \quad (3)$$

$$x_0 = 1 ; f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \quad (4)$$

$$x_0 = 4 ; f(x) = \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} \quad (5)$$

$$x_0 = 1 ; f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x+3} - 2} \quad (6)$$

$$x_0 = 3 ; f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{(x^2 - 9)^2} \quad (7)$$

$$x_0 = 1 ; f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} \quad (8)$$

$$x_0 = 2 ; f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8} \quad (9)$$

$$x_0 = 0 ; f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - x}{x^2 - x} \quad (10)$$

$$x_0 = 1 ; f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - x}{x^2 - x} \quad (11)$$



كيف تطرح أسئلة المستقيم المقارب المائل

مثال 1

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$

بين أن المستقيم الذي معادلته $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f)

مثال 2

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-4\}$ بـ : $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x + 4}$

- بين أن المستقيم الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f)

مثال 3

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$: $f(x) = 3x - 1 + \frac{1}{2 - x}$

- بين أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب معادلة له

مثال 4

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$: $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-x + 2}$

1- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x - 1]$

2- فسر النتائج هندسيا (استنتج وجود مقارب مائل لـ (C_f))

مثال 5

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$: $f(x) = 3x + \frac{2x + 1}{x - 2}$

1- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 3x]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$

2- فسر النتائج هندسيا (استنتج وجود مقارب مائل لـ (C_f))

قائمة درس محور النهايات بالترتيب و الأمثلة

