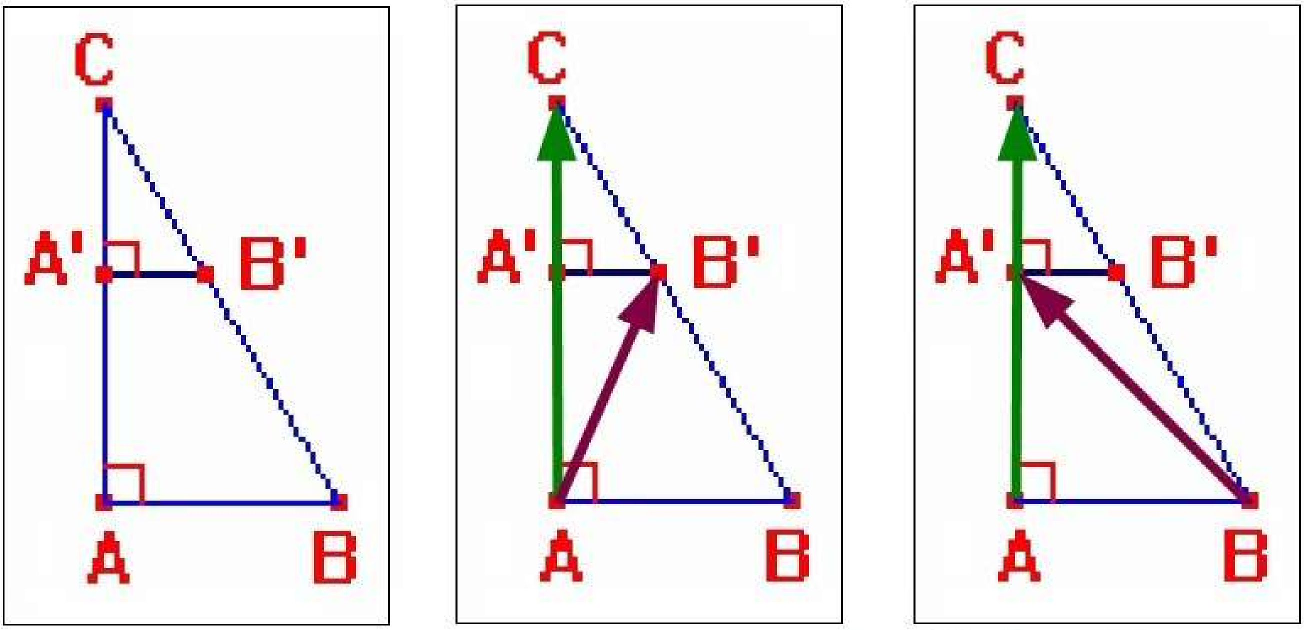
حل التمرين 52 صفحة 301 : ألهمني : تأثيره على التحاكي ...



المقارنة بين $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA'}$

طريقة1) ذهنيا متساويان:

كلاهما له نفس البداية $\overrightarrow{AC}$ والنهايتين لهما نفس المسقط العمودي $\overrightarrow{AA'}$.

طريقة2)

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AA'} = AC \times AA'$$

بحيث الشعاع $\overrightarrow{AA'}$ هو المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{AB'}$ على $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AA'} = AC \times AA'$$

بحيث الشعاع $\overrightarrow{AA'}$ هو المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{BA'}$ على $\overrightarrow{AC}$

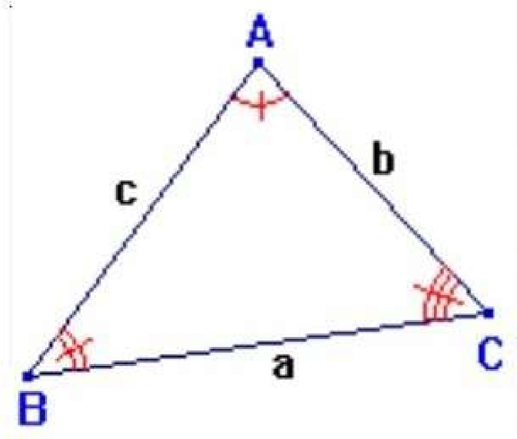
وبالتالي: $\boxed{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA'} = AC \times AA'}$

طريقة 3)

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}\right) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA'}$$
$$= 0 + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA'}$$
$$= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA'}$$

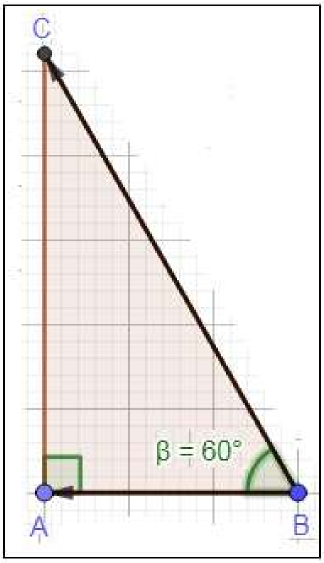
وبالتالي: $\boxed{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA'}}$ لأن: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 0$ وبالتالي: $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$

حل التمرين 53 صفحة 301 : طريقة فيثاغورس المعممة أو الكاشي



$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\widehat{A} \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = bc.\cos\widehat{A} \end{cases}$$

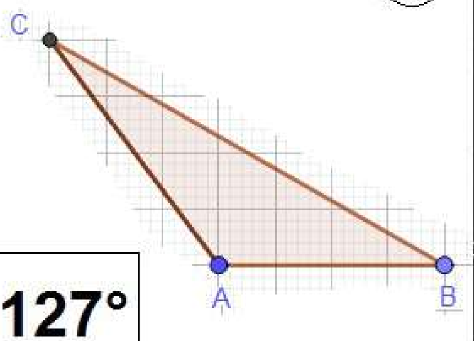
$$\begin{cases} BC = a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}} \\ \cos\widehat{A} = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{bc} \end{cases}$$



أ) $AB = 3 = c$ ، $AC = 6 = b$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 9$

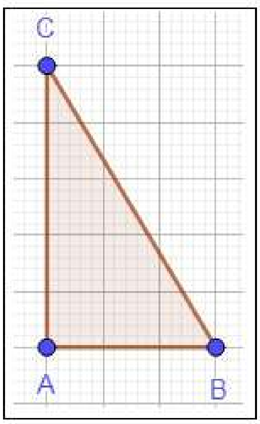
$$\begin{cases} BC = \sqrt{36 + 9 - 18} = \boxed{3\sqrt{3}} \\ \cos\widehat{A} = \dfrac{9}{18} = \boxed{0,5} \xrightarrow{\text{ومنه}} \boxed{\widehat{A} = 60°} \end{cases}$$

ب) $AB = 4$ ، $AC = 5$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -12$



$$\begin{cases} BC = \sqrt{25 + 16 + 24} = \boxed{\sqrt{65}} \\ \cos\widehat{A} = \dfrac{-12}{20} = \boxed{-0,6} \xrightarrow{\text{ومنه}} \boxed{\widehat{A} \simeq 127°} \end{cases}$$

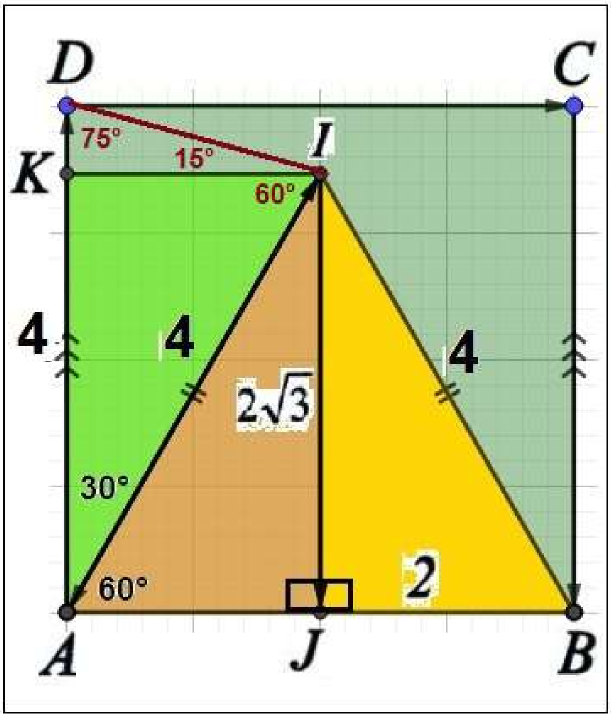
جـ) $AB = 3$ ، $AC = 4$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$



$$\begin{cases} BC = \sqrt{16 + 9 - 0} = \boxed{5} \\ \cos\widehat{A} = \dfrac{0}{12} = \boxed{0} \xrightarrow{\text{ومنه}} \boxed{\widehat{A} = 90°} \end{cases}$$

يسمى مثلث المهندسين ...

حل التمرين 54 صفحة 301 : اقياس زوايا غير شهيرة به



حساب الجداءات السلمية :

طريقة1) تكنولوجيا بجيوجبرا

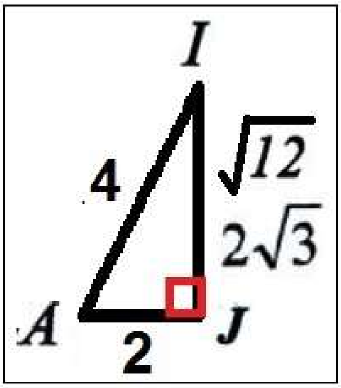
$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{DC}$	$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI}$	$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IA}$
0	$-13,86$ نرفضه	$13,86$ نرفضه	12

هنا معناه الإستئناس وليس الإعتماد ...
ثم نراجع ذهنيا فنلاحظ معقولية النتائج ...

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CB}$$

ونـرفض لأن القيم المضبوطة هي المطلب وليست المقربة .

1) حساب $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IA}$: طريقة2)



$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IJ}^2 = IJ^2 = \sqrt{12}^2 = 12$$

لأن: $\overrightarrow{IJ}$ هو المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{IA}$ على $\overrightarrow{IJ}$.

وفيثاغورس كما في الشكل المقابل

طريقة3) إستبدال المعطيات بأشعة مناسبة

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IJ}.\left(\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JA}\right) = \overrightarrow{IJ}^2 + \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{JA} = \overrightarrow{IJ}^2 = \boxed{12}$$

طريقة4)

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IA} = IJ.IA.Cos\left(\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IA}\right) = 4\sqrt{12}.Cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\sqrt{12}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{12}$$

حساب $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI}$:

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AK} = AD \times AK = 4 \times 2\sqrt{3} = \boxed{8\sqrt{3}}$$

أو

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI} = AD.AI.Cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{8\sqrt{3}}$$

حساب $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CB}$: بما أن: $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$ فإن:

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI}=\boxed{-8\sqrt{3}}$$

حساب $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{DC}$: لدينا: $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{DC}=0$ لأن: $(IJ)\perp(DC)$

2) حساب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DI}$: بما أن: لأن: $\overrightarrow{AJ}$ المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{DI}$ على $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AJ}=AB.AJ=\boxed{8}$$

حساب $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DI}$:

$$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DK}=DA\times DK=DA\times\left(DA-AK\right)$$
$$=4\times\left(4-2\sqrt{3}\right)$$

$$\boxed{DK=\left(4-2\sqrt{3}\right)} \text{ و } \boxed{\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DI}=8\left(2-\sqrt{3}\right)}$$

3) حساب DI في المثلث DKI القائم في K لدينا:

$$DI^2=DK^2+KI^2=DK^2+AJ^2=\left(4-2\sqrt{3}\right)^2+2^2$$

$$DI^2=16+12-16\sqrt{3}+4=8\left(4-2\sqrt{3}\right)=\boxed{8\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\boxed{DI=2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

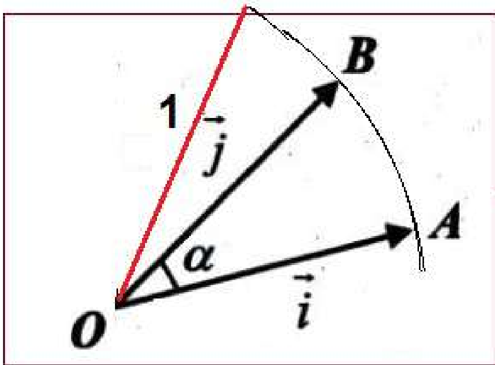
استنتاج قيم $Cos15°$ و $Cos75°$: أنظر اقياس الزوايا على الشكل

لدينا: ADI متساوي الساقين ومنه نستنتج أن $\boxed{\widehat{KID}=15°}$ و $\boxed{\widehat{KDI}=75°}$

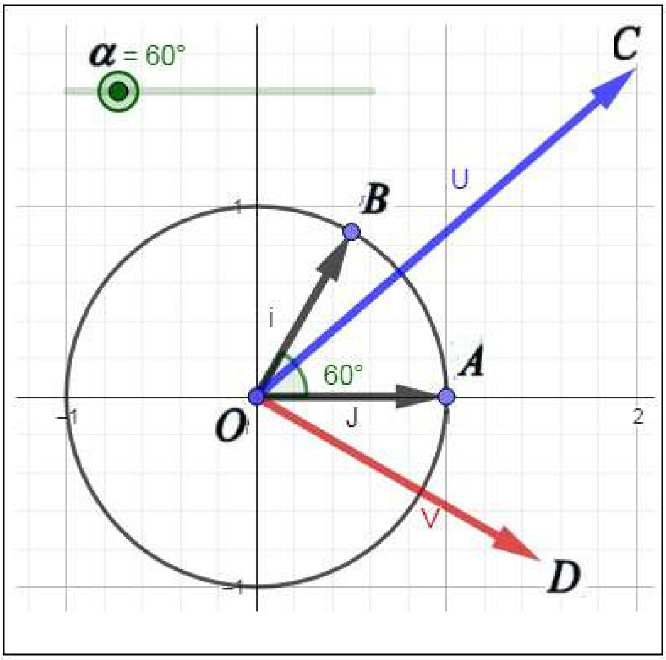
$$\cos 15°=\frac{KI}{DI}=\frac{2}{2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}=\boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

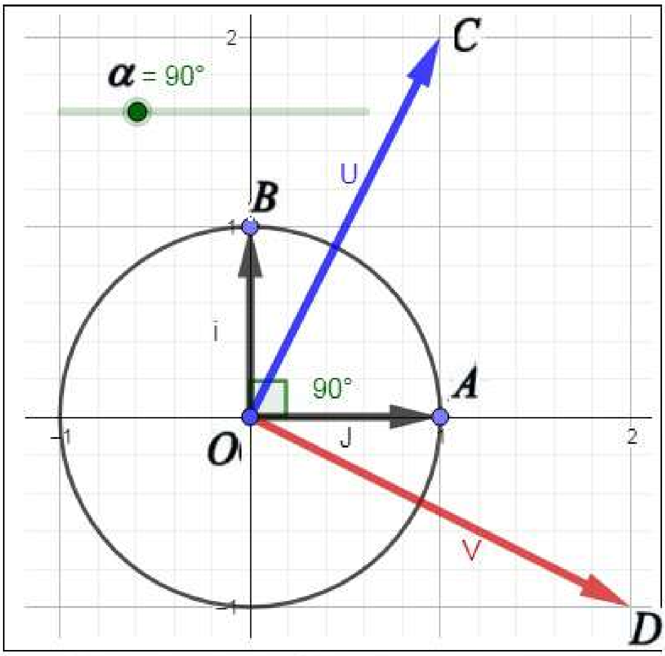
$$\cos 75°=\frac{DK}{DI}=\frac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}=\boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

حل التمرين 55 صفحة 301 :



$\overrightarrow{OC}=\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$ $\overrightarrow{OC}=(1)\,\overrightarrow{OA}+(2)\,\overrightarrow{OB}$	$\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{OD}=\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}$ $\overrightarrow{OD}=(2)\,\overrightarrow{OA}+(-1)\,\overrightarrow{OB}$	$\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$





1) حساب $\vec{u}^2$ ، $\vec{v}^2$ و $\vec{u}.\vec{v}$ بدلالة α :

$$\vec{u}^2=\left(\vec{i}+2\vec{j}\right)^2=\vec{i}^2+4\vec{j}^2+4\vec{i}.\vec{j}=5+4\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|\cos\alpha=\boxed{5+4\cos\alpha}$$

$$\vec{v}^2=\left(2\vec{i}-\vec{j}\right)^2=4\vec{i}^2+\vec{j}^2-4\vec{i}.\vec{j}=\boxed{5-4\cos\alpha}$$

$$\vec{u}.\vec{v}=\left(2\vec{i}-\vec{j}\right).\left(\vec{i}+2\vec{j}\right)=2\vec{i}^2+4\vec{i}.\vec{j}-\vec{j}.\vec{i}-2\vec{j}^2=3\vec{i}.\vec{j}=\boxed{3\cos\alpha}$$

2) تعيين قيمة مقربة إلى $\frac{1}{10}$ لقياس الزاوية $\widehat{COD}$ بالراديان

$$\boxed{\cos\widehat{COD}=\frac{\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}}{OC\times OD}=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\frac{3\cos\alpha}{\sqrt{25-16\cos^2\alpha}}}$$

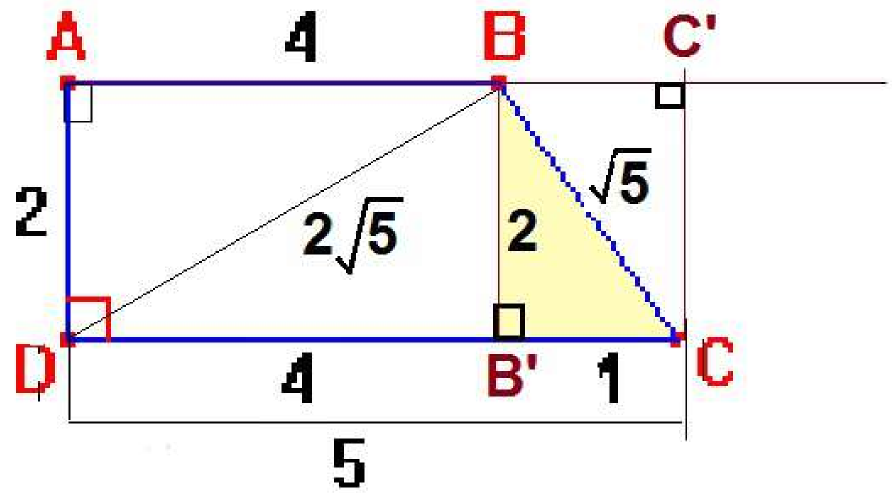
أ) $\alpha=\frac{\pi}{3}$; $\cos\widehat{COD}=\frac{3\times0,5}{\sqrt{25-4}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}\xrightarrow{\text{ومنه}}\widehat{COD}=70,9^\circ\simeq\boxed{1,2\text{ rad}}$

ب) $\alpha=\frac{\pi}{2}$; $\cos\widehat{COD}=0\xrightarrow{\text{ومنه}}\widehat{COD}=90^\circ=\boxed{1,6\text{ rad}}$

حل التمرين 56 صفحة 301 :

حساب الجداءات السلمية :

ذهنيا بفكرة الجداء السلمي لشعاعين مرتبطين خطيا سهلة ...



1) حساب $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}$:

$$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC}.\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = DC\times AB = \boxed{20}$$

لأن: $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}=0$ لأن: $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{DA}$ حاملاهما متعامدان. أو نستعمل B' أسهل أو

$$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB} = DC.DB.Cos\left(45°\right) = 5\times 2\sqrt{5}\times\frac{4}{2\sqrt{5}} = \boxed{20}$$

2) حساب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC'} = AB\times BC' = AB\times 1 = \boxed{4}$$

حيث $\overrightarrow{BC'}$ هو المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{BC}$ على $\overrightarrow{AB}$

3) حساب $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$:

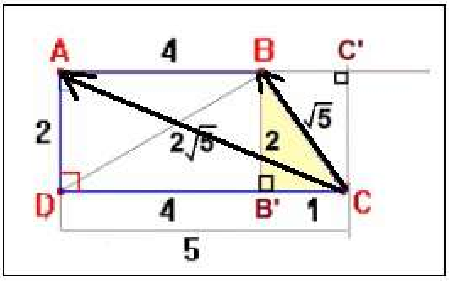
$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} = AD^2 = \boxed{4}$$

الشعاع $\overrightarrow{AD}$ هو المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{BC}$ على $\overrightarrow{AD}$

4) حساب $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$: **أنظر الشكل**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} &= \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right).\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CB}\\ &= AB\times DC-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+DC\times B'C-BC^2\\ &= 20-4+5-5 = \boxed{16}\end{aligned}$$

5) حساب $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$:



$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right).\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\right) = \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}$$

$$= \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB'} + 0 + \overrightarrow{DA}^2$$

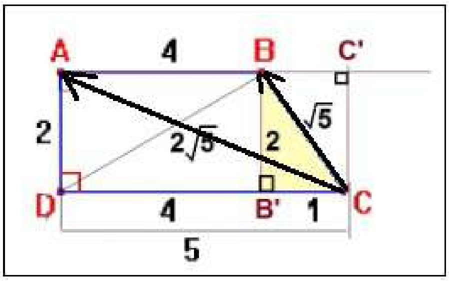
$$= 25 - 5\times 4 + 4 = \boxed{9}$$

لأن: $\overrightarrow{DA}$ هو المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{DB}$ على $\overrightarrow{DA}$

والشعاع $\overrightarrow{DB'}$ هو المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{DB}$ على $\overrightarrow{DC}$.

6) نستنتج قيمة مقربة لقيس الزاوية $\widehat{ACB}$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CA\times CB\cos\widehat{ACB} \xrightarrow{\text{ومنه}} \cos\widehat{ACB} = \frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{CA\times CB} = \frac{9}{\sqrt{29}\ \sqrt{5}}$$

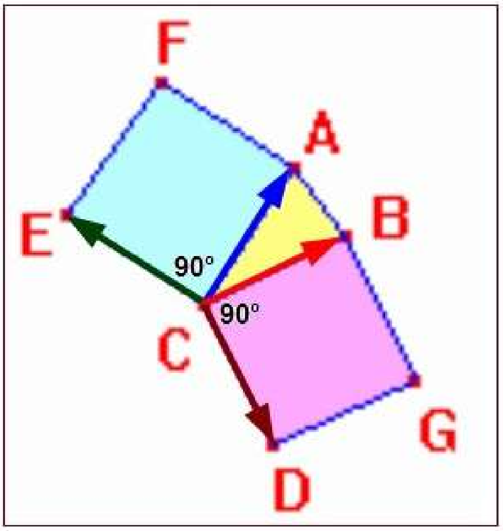


$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 4 + 25 \xrightarrow{\text{ومنه}} AC = \sqrt{29}$$

$$CB^2 = CB'^2 + BB'^2 = 4 + 1 \xrightarrow{\text{ومنه}} CB = \sqrt{5}$$

$$\boxed{\cos\widehat{ACB} = \frac{9}{\sqrt{145}}} \xrightarrow{\text{ومنه}} \boxed{\widehat{ACB} \approx 42°}$$

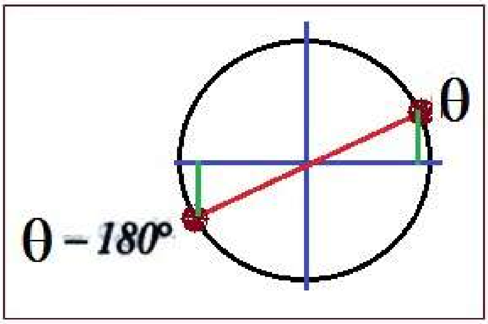
حل التمرين 57 صفحة 301 :



1) إثبات أن $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}$:

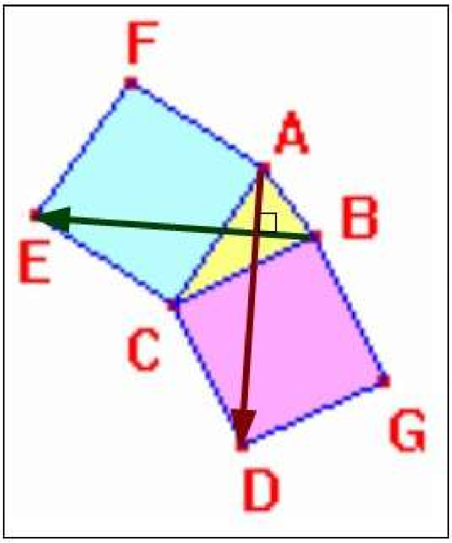
$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CA \times CB \cos \widehat{ACB}$$
$$= CE \times CD \cos\left(\widehat{ECD} - 180°\right)$$
$$= -CE \times CD \cos \widehat{ECD}$$
$$= -\overrightarrow{CE} \times \overrightarrow{CD}$$
$$= -\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}$$

أو نقول: $\boxed{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CD} = 0}$



ذلك لأن :

$$\widehat{ECD} = 180° + \widehat{ACB}$$
$$CB = CD \text{ و } CA = CE$$
$$\cos\left(\theta - 180°\right) = -\cos\theta \ , \quad \theta = \widehat{ECD}$$



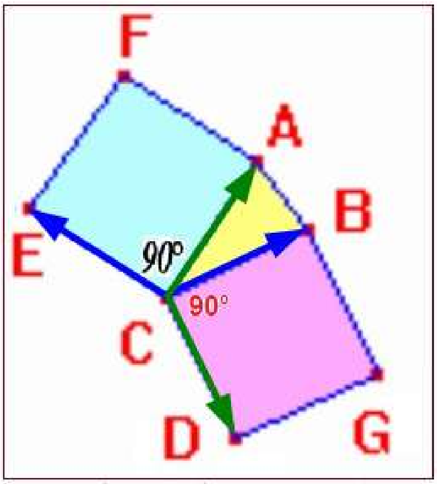
2) حساب $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}\right).\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right)$$
$$= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CD}$$
$$= \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} + \underbrace{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{AC}}_{=0} + \overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CD}$$

من الجواب السابق $= \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CD} = 0$

ومنه: نستنتج أن الأشعة $\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{AD}$ حواملها متعامدة.

3) مقارنة بين $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}$:

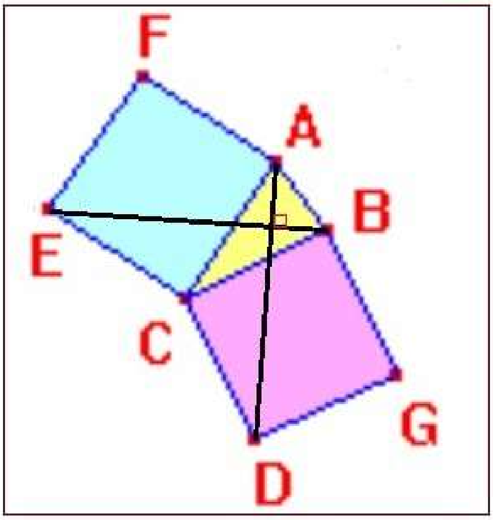


$$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CB} = CE \times CB \cos\left(\widehat{ECB}\right)$$
$$= CE \times CB \cos\left(90° + \widehat{ACB}\right)$$
$$= CA \times CD \cos\left(90° + \widehat{ACB}\right)$$
$$= CA \times CD \cos\left(\widehat{ACD}\right) = \boxed{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}}$$

وبالتالي: $\boxed{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CB}}$

ذلك لأن: $CB = CD$ و $CE = CA$

4) برهان أن : $BE = DA$

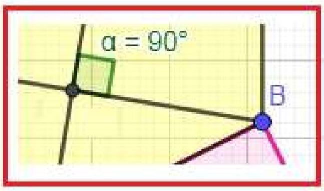


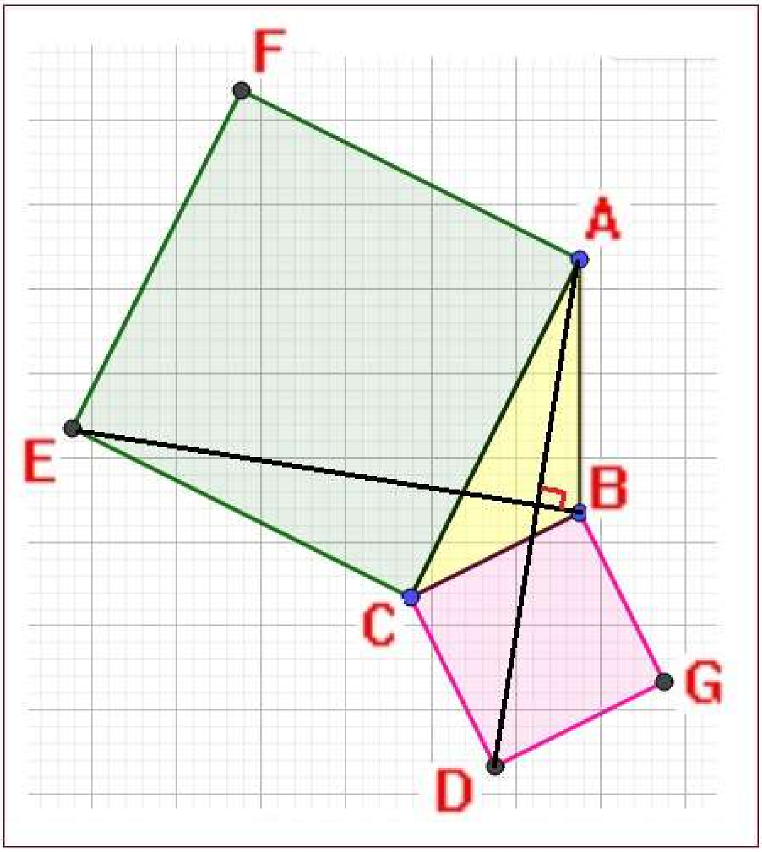
$$\begin{cases} \overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(CE^2 + CB^2 - \left(\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CB}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(CE^2 + CB^2 - BE^2\right) \\ \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\left(CA^2 + CD^2 - \left(\overrightarrow{CA} - CD\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(CA^2 + CD^2 - DA^2\right) \\ \overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{بما أن}} \begin{cases} CE^2 + CB^2 - BE^2 = CA^2 + CD^2 - DA^2 \\ CB = CD \\ CE = CA \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{فإن}} BE^2 = DA^2$$

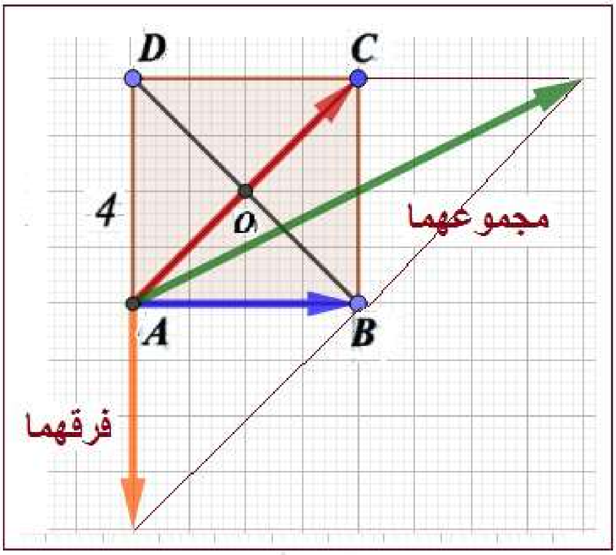
$$\xrightarrow{\text{وبالتالي:}} \boxed{BE = DA}$$





هل هو متقايس الساقين حتما ؟؟

حل التمرين 58 صفحة 301 : حسابه بـ 11 طريقة مختلفة منها ...



حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:

① طريقة التعريف بالزوايا الموجهة :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$$

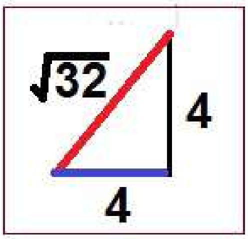
$$= 4 \times 4\sqrt{2} \cos\frac{\pi}{4}$$

$$= 4 \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{16}$$

② الكاشي

ذلك لأن:

$$\cos\widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{4^2 + \sqrt{32}^2 - 4^2}{2} = \boxed{16}$$

③ الهندسة التحليلية والإنساب الى معلم:

نعتبر المعلم $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$ متعامدا ومتجانسا حيث: $\vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

لدينا: $A(0,0), B(4,0), C(4,4), D(0,4)$ ومنه: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4 \times 4 + 4 \times 0 = 16$$

④ المتطابقات الشهيرة **طرحا - رقم 2**

$$BC^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2} = \frac{4^2 + \sqrt{32}^2 - 4^2}{2} = \boxed{16}$$ وهي نفسها :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - CB^2\right) = \frac{1}{2}AC^2$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + BC^2\right) = \frac{1}{2} \times (16 + 16) = \boxed{16}$$

إظافة ⑤ المسقط العمودي للشعاع:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = \boxed{16}$$

لأن: الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{AC}$ على $\overrightarrow{AB}$.

حل التمرين 59 صفحة 301 : مظهر المتطابقات الشهيرة بواسطته.

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من المستوي.

1) إثبات أن $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=4\vec{u}.\vec{v}$ مربع المجموع ناقص مربع الفرق

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\left[(\vec{u}+\vec{v})+(\vec{u}-\vec{v})\right].\left[(\vec{u}+\vec{v})+(\vec{u}-\vec{v})\right]=(2\vec{u}).(2\vec{v})=\boxed{4\vec{u}.\vec{v}}$$

إثبات أن $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\right)$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\left[\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}\right]-\left[\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}.\vec{v} \text{ و } \|\vec{u}+\vec{v}\|^2\right]$$

$$=2\|\vec{u}\|^2+2\|\vec{v}\|^2=\boxed{2\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\right)}$$

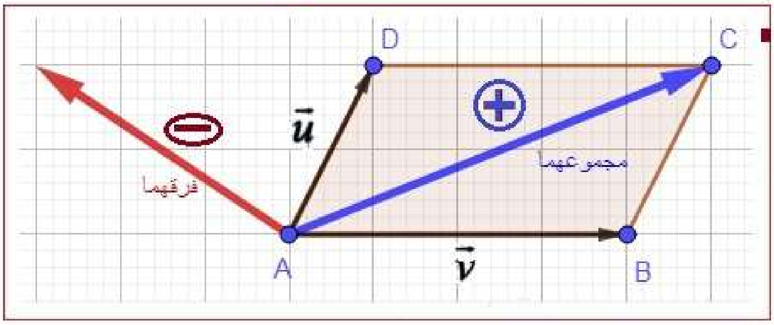
2) إثبات أن $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$:

لدينا: $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$ أو

$$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}.(\vec{u}-\vec{v})+\vec{v}.(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\underbrace{\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{u}}_{=0}-\vec{v}^2$$

$$=\vec{u}^2-\vec{v}^2=\boxed{\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2}$$

استنتاج أن قطرا متوازي أضلاع يكونا متعامدين إذا وفقط إذا كانت أضلاعه متقايسة:



ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع.

بوضع $\overrightarrow{AD}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$

يكون $\overrightarrow{AC}=\vec{u}+\vec{v}$ و $\overrightarrow{BD}=\vec{u}-\vec{v}$

نفرض:

قطراه متعامدين معناه: $(AC)\perp(BD)$

معناه: $(\vec{u}-\vec{v})$ و $(\vec{u}+\vec{v})$ حاملاهما متعامدان

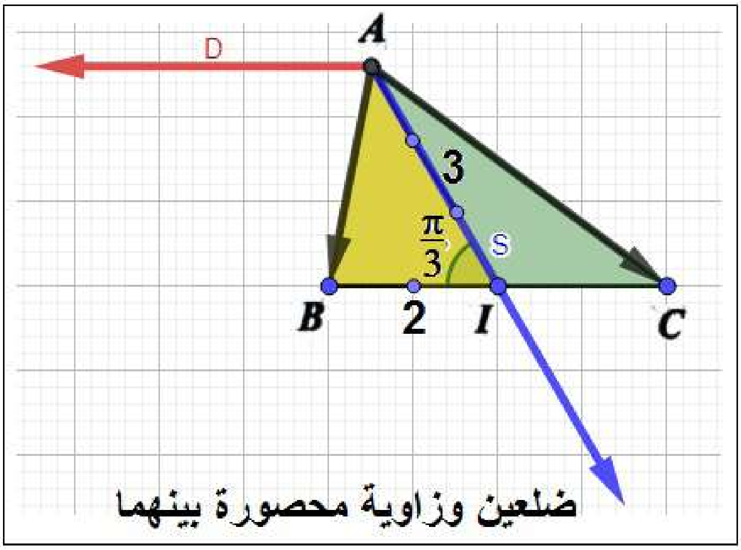
وبالتالي: $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=0$ ومنه $\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=0$ وعليه: $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$ معناه: $AB=AD$

نفرض: $AB=AD$ معناه: $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$ وعليه: $\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=0$ ومنه ... ومنه $(AC)\perp(BD)$

وبالتالي قطرا متوازي أضلاع $ABCD$ يكونا متعامدان أي $(AC)\perp(BD)$

إذا وفقط إذا $AB=AD$ وبالتالي أضلاعه متقايسة. وعندها يكون معين.

حل التمرين 60 صفحة 301 :



حساب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right).\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)$$
$$=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right).\left(\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}\right)$$
$$=AI^2-IB^2$$
$$=9-4=5$$

ومنه: $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=5}$

حساب AB^2+AC^2 :

$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2=AB^2+AC^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$\left[\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right]^2=\left[\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}\right]^2=\left[2\overrightarrow{AI}\right]^2=4AI^2=\boxed{36}$$

$$AB^2+AC^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=36-10=\boxed{26}$$

ومنه: $\boxed{AB^2+AC^2=26}$

حساب AB^2-AC^2 : هندسيا أسهل

$$AB^2-AC^2=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{CB}.\left(2\overrightarrow{AI}\right)=\left(2\overrightarrow{IB}\right)\left(2\overrightarrow{AI}\right)=4\,\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AI}$$

$$AB^2-AC^2=-4\,\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}=-4\quad BI\times IA\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-4\times2\times3\times\frac{1}{2}=\boxed{-12}$$

حساب AC و AB :

طريقة إستنتاجية

$$\begin{cases}AB^2-AC^2=-12\\AB^2+AC^2=26\end{cases}\xrightarrow[\text{وبالطرح}]{\text{بالجمع}}\begin{cases}2AB^2=14\\2AC^2=38\end{cases}\xrightarrow{\text{ومنه}}\begin{cases}AB=\sqrt{7}\\AC=\sqrt{19}\end{cases}$$

طريقة أسهل : الكاشي عنده: ضلعين وزاوية محصورة بينهما فيجد الثالث

$AB=\sqrt{3^2+2^2-2\times2\times3\times\cos(60°)}=\boxed{\sqrt{7}}$ ونعوض في إحدي المعادلتين

$$AC=\sqrt{AB^2+12}=\boxed{\sqrt{19}}$$